PART2 因数定理

要点① 因数定理

多項式 $P(x)$ を 1 次式 $x-k$ で割ったときの余りが 0，つまり $x-k$ で割り切れるとき，剰余の定理により　　　　　　である。また，このとき

$$P(x)=(x-k)Q(x)$$

と表されることにより，$x-k$ は $P(x)$ の「　　」であることがわかる。

よって，以下の定理が成り立つ。

> **因数定理**
>
> 多項式 $P(x)$ が $x-k$ を因数にもつ　$\Leftrightarrow$　$P(k)=0$

例　$P(x)=x^3-4x^2+x+6$ について

$$P(2)=2^3-4\cdot2^2+2+6=$$

よって，多項式 $P(x)$ は　　　　を因数にもつ。

また

$$P(1)=1^3-4\cdot1^2+1+6=4$$

より，多項式 $P(x)$ は　　　　を因数にもたない。

因数定理を用いると，3 次式やそれ以上の次数の式を因数分解することができる。

例　$P(x)=x^3-4x^2+x+6$ について，$P(2)=0$ より，多項式 $P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

$P(x)$ を $x-2$ で割ると，商は x^2-2x-3

よって

$$P(x)=$$

$$=(x-2)(x+1)(x-3)$$

$$\begin{array}{r}
x^2-2x-3 \\
x-2\,\big)\,\overline{x^3-4x^2+x+6} \\
\underline{x^3-2x^2} \\
-2x^2+x \\
\underline{-2x^2+4x} \\
-3x+6 \\
\underline{-3x+6} \\
0
\end{array}$$

[MEMO]

2 因数定理を用いて，$2x^3+9x^2-6x-5$ を因数分解せよ。

Point Pickup

因数定理を用いた因数分解

因数定理

多項式 $P(x)$ が $x-k$ を因数にもつ　$\Leftrightarrow$　$P(k)=0$

を用いて，多項式 $P(x)$ を因数分解する手順は以下。

① $P(k)=0$ となる k を見つける。

k の値の候補は，$\pm\dfrac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次の項の係数の約数}}$ である。

② $P(x)\div(x-k)$ を計算する。その商を $Q(x)$ とすると

$$P(x)=(x-k)Q(x)$$

と表される。

③ $Q(x)$ を因数分解する。

第 4 講　PART2 確認問題

1　因数定理を用いて $2x^3-5x^2-x+6$ を因数分解すると

$$\left(x+\boxed{\text{ア}}\right)\left(x-\boxed{\text{イ}}\right)\left(2x-\boxed{\text{ウ}}\right)$$

となる。

PART2 因数定理

2 因数定理を用いて，$2x^3+9x^2-6x-5$ を因数分解せよ。

[解答]

$P(x)=2x^3+9x^2-6x-5$ とおくと

$$P(1)=2\cdot1^3+9\cdot1^2-6\cdot1-5=0$$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

$P(x)$ を $x-1$ で割ると，商は $2x^2+11x+5$

したがって

$$\begin{aligned}2x^3+9x^2-6x-5&=(x-1)(2x^2+11x+5)\\&=(x-1)(2x+1)(x+5)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2+11x+5 \\ \hline x-1 & 2x^3+9x^2-6x-5 \\ & 2x^3-2x^2 \\ \hline & 11x^2-6x \\ & 11x^2-11x \\ \hline & 5x-5 \\ & 5x-5 \\ \hline & 0 \end{array}$$

第 4 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：2，ウ：3

[解説]

$P(x)=2x^3-5x^2-x+6$ とおくと

$$P(-1)=2\cdot(-1)^3-5\cdot(-1)^2-(-1)+6=0$$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。[A] [B]

$P(x)$ を $x+1$ で割ると次のようになる。[B]

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x^2-7x\ \ +6 \\
\hline
x+1 & 2x^3-5x^2-\ \ x+6 \\
 & 2x^3+2x^2 \\
\hline
 & \quad -7x^2-\ \ x \\
 & \quad -7x^2-7x \\
\hline
 & \qquad\qquad 6x+6 \\
 & \qquad\qquad 6x+6 \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

商は $2x^2-7x+6$ であるから

$$2x^3-5x^2-x+6=(x+1)(2x^2-7x+6)$$ [B]

$$=\boldsymbol{(x+1)(x-2)(2x-3)}$$

[A]　因数定理
多項式 $P(x)$ が $x-k$ を因数にもつ
$\Longleftrightarrow$ $P(k)=0$

[B]　因数定理を用いて，多項式 $P(x)$ を因数分解する手順
① $P(k)=0$ となる k を見つける。
k の値の候補は
$$\pm\frac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次の項の係数の約数}}$$
である。
② $P(x)\div(x-k)$ を計算する。その商を $Q(x)$ とすると
$P(x)=(x-k)Q(x)$
と表される。
③ $Q(x)$ を因数分解する。